Pre-service teacher's creative mathematical reasoning: Development of a theoretical framework for a research study

Alv Birkeland, Anne Birgitte Fyhn, University of Tromsø, Norway
Bharath Sriraman, University of Montana

Abstract: To investigate if pre-service teachers' mathematical reasoning could be creative, the first author conducted a study on his own students work with mathematical tasks based on a loose framework. The aim of this chapter is to illuminate the development of a new theoretical framework for ensuing studies on the creative mathematical reasoning. In order to do so the authors analyze four texts written over a period of four years and use inductive analysis to describe the development of the theoretical framework. We also give some possible explanations of how support from various researchers has influenced the development of the study. The analysis showed that the initial framework was not reliable for reasons elicited in the chapter. We present the new framework towards the end of the chapter.

Keywords: theoretical frameworks; mathematical creativity; creative mathematical reasoning

Pre-print of Chapter (in Norwegian) to appear in: *Festschrift for Marit Johnsen-Høines, Caspar Vorlag, Bergen.*

Kreative matematiske resonnementer hos lærerstudenter. Utvikling av det teoretiske rammeverket for en FOU-studie

Alv Birkeland, Anne Birgitte Fyhn og Bharath Sriraman

For å undersøke om lærerstudenters matematiske resonnementer kan være kreative, gjennomførte Alv en studie av egne studenters arbeid med matematikkoppgaver. Formålet med dette kapitlet er å belyse utviklingen av teorigrunnlaget for Alvs studie. Vi analyserer fire tekster som Alv skrev over en periode på fire år. Vi valgte en induktiv analyse av tekstene fordi målet med kapitlet er å beskrive utviklingen av det teoretiske rammeverket for studien. Vi gir også noen mulige forklaringer på hvordan fagmiljøet har innvirket på denne utviklingen. Alv konstruerte først ett rammeverk for analyser av studenters matematiske kreativitet. Analysene viste at dette første rammeverket ikke var reliabelt: Noen kategorier viste seg å være uaktuelle, og én kategori var ikke tilstrekkelig nyansert. Det nye rammeverket blir presentert i slutten av kapitlet.

Norsk grunnskolelærerutdanning skal være forskningsbasert. Det nasjonale regelverket sier at lærerutdanningsinstitusjonene skal tilby «… integrerte, profesjonsrettede og forskningsbaserte grunnskolelærerutdanninger med høy faglig kvalitet» (KD, 2010, §1). Dette kan bety at undervisningen skal formidle resultater fra forskning, at forskning er utgangspunkt for hvordan det blir undervist og kommunisert, eller at undervisningen støtter seg på resultater fra forskning. Det kan også bety at undervisningen er gjenstand for forskning, og at undervisningen på det viset utvikles og forbedres. Dette kapitlet er et eksempel på det siste.

Den generelle delen av læreplanen for den 10-årige grunnskolen (KUF, 1996) inneholder et avsnitt om det skapende mennesket. Her framgår det at undervisningen må vise hvordan oppfinnsomhet og skaperkraft stadig har endret menneskenes levekår og livsinnhold, og under hvilke historiske vilkår dette har skjedd. Derfor gjennomførte Alv en studie der han undersøkte lærerstudenters matematiske kreativitet. Før dette deltok han i Bharaths doktorgradsemne *Matematikk – kultur – kreativitet* ved Universitetet i Tromsø[1]. For å få godkjent emnet måtte Alv skrive et essay der teorien i kurset ble brukt. Det neste

[1] Senere har institusjonen skiftet navn til *UiT – Norges arktiske universitet*.

semesteret startet Marit som professor II, og hun oppfordret Alv til å gjennomføre et undervisningseksperiment i egen klasse. Essayet fra doktorgradsemnet var et forarbeid til studien hans.

Anne ble med som støttespiller og gjorde videoopptak av undervisningen. Alv vurderte ulike teoretiske perspektiver på studentenes resonnementer og diskuterte dette med Bharath. I analysen av eksperimentet hadde Alv fokus på studentenes matematiske resonnementer når de arbeidet med oppgaver. Dette kapitlet studerer utviklingen av teorigrunnlaget for studien hans. Vi analyserer fire tekster som han skrev i perioden 2010–2014. Problemstillingen vår er: «Hvordan utvikles teorigrunnlaget for en studie av kreativitet i lærerstudenters matematiske resonnementer?» I tekst 2 og tekst 4 analyserer Alv studenters arbeid med matematikkoppgaver i undervisningseksperimentet. I tekst 1 og tekst 3 tar han opp spørsmål knyttet til matematikk og kreativitet mer generelt.

Bakgrunn

Dette avsnittet redegjør kort for Bharaths doktorgradsemne *Matematikk – kultur – kreativitet*. Deretter følger en presentasjon av undervisningseksperimentet.

Matematikk – kultur – kreativitet

Målsettingen med dette doktorgradsemnet var dels å få en oversikt over ulike oppfatninger av kreativitet i forhold til tid, kultur og urfolkskunnskap, og dels å diskutere implikasjoner for undervisning og læring. Emnet belyste ulike perspektiver på kreativitet. Noen av disse perspektivene går vi inn på senere i kapitlet. Emnet var organisert som fem forelesninger. Etter hver forelesning fulgte en diskusjon der litteraturen ble knyttet til forelesningens tema.

Emnet betraktet kreativitet som et sammensatt og kulturavhengig konstrukt, der litteraturen presenterte hvordan ulike kulturer har sine standarder for kreativitet (Lubart, 2009; Sternberg, 2007). Ambroses (2009) modell for utviklingen av *evner* for samfunnets behov ble brukt som ramme for undervisning og læring i matematikk-klasserommet. Innovasjon inngikk i standarder for problemformulering og problemløsing. For eksempel har industrien behov for problemformulering og problemløsing som fungerer i en praktisk setting, snarere enn problemløsing av teoretisk art (Root-Bernstein, 2003). Diskusjonene i emnet var relatert til undervisning i matematikk, for eksempel spørsmålet: *Is creativity* *cultivable in the classroom?* (Fyhn, feltnotater, 20.januar 2010). Emnet understreket viktigheten av både institusjonskultur, samfunnskultur og urfolkskultur. Østens og Vestens perspektiver på kreativitet ble løftet fram og diskutert. I Østen er både repeterende trening og utenatlæring vektlagt som elementer av kreativitet. Slik er det ikke hos oss i Skandinavia.

Undervisningseksperimentet

Undervisningseksperimentet fant sted vårsemesteret i 2010. Studentene som deltok, fulgte et kurs i tallteori. Der skulle de løse oppgaver som handlet om følger av tall. Oppgavene gikk ut på å finne et generelt uttrykk for en følges ledd. Avhengig av hvordan denne problemstillingen blir lagt fram, kan den gi muligheter for studentenes kreative matematiske resonnering. Det er en fagdidaktisk utfordring å vurdere hvor mye hjelp studentene skal få innledningsvis. Det gjelder å finne en balanse slik at studentene får nok hjelp til å komme i gang med oppgavene, men ikke for mye slik at resten bare er rutiner for studentene. Ideen var at studentene skulle få anledning til å formulere egne resonnementer. Et annet tema disse studentene arbeidet med, var Euklids algoritme. Når studentene mestrer denne algoritmen, kan arbeid med dette temaet bli ren rutine uten rom for matematisk kreativitet. Derfor ble oppgaver om følger valgt i eksperimentet.

Alv problematiserte ikke begrepet matematisk kreativitet for studentene på forhånd. Studentene ble invitert til å delta i undervisningseksperimentet og informert om at det var en del av en studie av lærerstudenters matematiske resonnementer og kreativitet. Målet var at studentene skulle oppleve undervisningseksperimentet mest mulig som en normal undervisningssituasjon. Alv gjorde dette for å oppnå autentisitet i studien.

I eksperimentet skulle studentene formulere sine egne matematiske ideer og presentere disse med matematiske symboler. En av oppgavene handlet om denne tallfølgen:

$$0, 4, 10, 18, 28, 40 \ldots$$

Studentene fikk ett hint. De ble bedt om å skrive opp differensene mellom følgens ledd x_n og dermed få følgende ligninger:

$$x_2 - x_1 = x'_1$$
$$x_3 - x_2 = x'_2$$
$$x_4 - x_3 = x'_3$$
$$x_5 - x_4 = x'_4$$

$$\vdots$$
$$x_n - x_{n-1} = x'_{n-1}.$$
Følgen (x_n) ga på denne måten opphav til en ny følge (x'_n). Når disse ligningene adderes, faller de fleste leddene mot hverandre på følgende vis:
$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_1.$$
Resultatet blir ligningen
$$x_n - x_1 = x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + \cdots + x'_{n-1}.$$
Denne metoden ble kalt glidelåsmetoden. Studentene ble gjort kjent med denne metoden som et hint. Tanken var at de måtte forstå hintet for å kunne bruke det. Dessuten gjenstod det å finne summen av de $n-1$ første leddene i den nye følgen (x'_n). For å finne denne summen måtte studentene lage sitt eget matematiske resonnement.

Kommognisjon og kritisk dialog

For å forstå hva matematisk tenkning handler om, spør Sfard (2008) hva tenkning mer generelt dreier seg om. Sfards utgangspunkt er at historisk etablerte, kollektivt utførte aktiviteter er en utviklingsmessig forutsetning for alle menneskelige ferdigheter. Fordi tenkning er en slik ferdighet, har tenkning også en kollektiv forgjenger, nemlig kommunikasjon. Kommunikasjon mellom personer er en forutsetning for tenkning. Sfard definerer tenkning som en individualisert versjon av kommunikasjon mellom personer. Hennes begrep *kommognisjon* («commognition»), er satt sammen av *kommunikasjon* og *kognisjon*. Kommognisjon uttrykker at individuell tenkning og kommunikasjon mellom individer er to sider av samme fenomen. Studentene som deltok i undervisningseksperimentet, arbeidet i grupper. Kommunikasjonen mellom studentene i hver gruppe uttrykte noe av tenkningen som foregikk mens de løste oppgavene.

Arbeid i små grupper kan virke inn på studenters resonnementer. Det kan hende at studenters matematiske resonnering foregår annerledes når de arbeider på egen hånd. Høyst sannsynlig vil noen si at de resonnerer bedre alene enn i en gruppe, mens andre vil si at de resonnerer bedre i grupper enn alene. I denne teksten er utgangspunktet at innsikt i lærerstudenters matematiske resonnementer når de samarbeider om å løse matematiske oppgaver, kan danne grunnlag for ny teori om studenters matematiske resonnementer.

Studenters samtaler om å løse matematiske oppgaver kan betraktes som en parallell til den vitenskapelige diskurs som foregår mellom forskere i en forskningsgruppe eller et forskningsmiljø. Hovedforskjellen er at et forskningsmiljø fokuserer på forskning og ny viten, mens studenter er opptatt av det som er nytt for dem og av didaktiske spørsmål. Den vitenskapelige diskurs blant forskere foregår blant annet i tidsskrifter, mens studenter vanligvis ikke skal publisere sine skriftlige arbeider.

Alrø og Skovsmose (2006) knytter sammen begrepene *dialog* og *kritikk* ved å diskutere læring i spenningsfeltet mellom *dialog*, *intensjon*, *refleksjon* og *kritikk*. De karakteriserer en dialog som en undersøkende, uforutsigbar, risikofylt og likeverdig samtale. De beskriver dialogen som en undersøkende samtale som har som mål å skape ny erkjennelse. Dialogen eksisterer i kraft av likeverd og respekt for hverandres forskjellighet. Det foregår ingen maktutøvelse, og ingen av partene forsøker å overtale den andre. I en dialogisk samtale mellom to ulike parter vil asymmetrien aldri bli borte, men den kan tildeles en plass i skyggen.

For at den som skal lære, skal kunne få et eierforhold til ny kunnskap, må vedkommende ha en intensjon om å lære. I følge Alrø og Skovsmose betyr refleksjon å bevisstgjøre seg, å vurdere og revurdere sine tanker, følelser og handlinger. For å kunne lære er det viktig å kunne utvise slik ettertenksomhet om et gitt læringsinnhold.

Kritikk forståes ofte som noe negativt. Alrø og Skovsmose bruker begrepet *kritikk* som betegnelse for det å forholde seg og ta stilling til handlinger, ideer, teorier, begreper og metoder. Kritisk læring omfatter både å ta stilling til læremidler og til gjennomføring av undervisning, å analysere innholdet og det å ville omsette kritikken i konkret handling. Kritikk forutsetter involvering, intensjon og eierskap. Dessuten er kritikk alltid forbundet med refleksjon. Dialogen har noen særlige kvaliteter som kan tilføre læreprosessen kritiske kvaliteter. Både dialog og kritikk uttrykker usikkerhet og søking etter forandring. Alrø og Skovsmose betrakter begge deler som vesentlige potensialer for læring. Alv hadde et fagmiljø der han kunne diskutere ideer, teorier, begreper og metoder. For at slike diskusjoner kunne ta form av kritisk dialog, var det nødvendig at kollegene utviste respekt for hverandres forskjellighet.

Perspektiver på kreativitet

Dette avsnittet beskriver ulike perspektiver på kreativitet. Noen perspektiver inngår i begge rammeverkene for studien, mens andre bare inngår i ett av rammeverkene. De ulike perspektivenes rolle i utviklingen av rammeverk blir beskrevet i et eget avsnitt senere. Den generelle delen av læreplanen (KUF, 1996) legger stor vekt på kreativitet. Ifølge det nasjonale regelverket for grunnskolelærerutdanningen skal læringsutbyttet være slik at kandidaten «kan tilrettelegge for og lede gode kreative læringsmiljø» (KD, 2010, §2).

Mellin-Olsen (1975, ref. i Mellin-Olsen, 1984) skiller mellom strukturbasert og instrumentell matematisk forståelse. Han gir et eksempel: Ivrige matematikklærere legger stor vekt på matematisk forståelse av regler i matematikken, mens elevene i hovedsak er opptatt av å forstå hvordan reglene skal brukes. Det «å få riktig svar» eller å forstå hvordan en regel skal brukes, kaller Mellin-Olsen for en instrumentell forståelse av matematikk. Det er vanskelig å se for seg at studenter med en instrumentell forståelse av matematikk kan ha kreative matematiske resonnementer. For at studenters matematiske resonnementer skal være kreative, er det antagelig nødvendig at de har en matematikkforståelse som i større grad er strukturbasert. I sin studie tok Alv utgangspunkt i at en strukturbasert matematikkforståelse er en forutsetning for matematisk kreativ resonnering, uavhengig av perspektiv på kreativitet.

Fire-K-modellen for kreativitet

Beghetto og Kaufman (2009) definerer kreativitet som evnen til å produsere arbeid som er nytt og originalt, men også nyttig i bred forstand. Med nyttig menes ikke bare det som er anvendbart, men også det som er meningsbærende slik dette defineres av fagfolk på feltet det gjelder. Andrew Wiles bevis for Fermats siste sats, er eksempel på kreativitet som ikke bare ble oppfattet som originalt, men også nyttig i bred forstand for verdens tallteoretikere.

Beghetto og Kaufman spør hvilket nivå av originalitet og meningsfullhet som er nødvendig. Tradisjonelt har man hatt to kategorier av kreativitet. Den ene kalles *Stor-K-kreativitet* («Big-C») og den andre *liten-k-kreativitet* («little-c»). Kategorien Stor-K (eminent) dekker klare eksempler på kreativitet slik den er uttrykt for eksempel i Pytagoras’ setninger eller Mozarts komposisjoner. Kategorien liten-k (ordinær) dekker kreativitet slik den kommer til uttrykk i hverdagen, for eksempel når noen arrangerer planter og blomster i hagen. I tillegg introduserer Beghetto og Kaufman to nye kategorier. Den ene kategorien kalles *mini-k-kreativitet* («mini-c») og dekker kreativitet på det personlige planet slik den kan komme til uttrykk hos elever og studenter i læringssituasjoner. Den andre kategorien kalles *Pro-k-kreativitet* («Pro-c») og kommer til uttrykk på det profesjonelle planet hos utøvere av ulike profesjoner. Dette omfatter kreativitet som ennå ikke har oppnådd status som eminent. Matematikere som publiserer i vitenskapelige tidsskrifter, er et eksempel på Pro-k-kreativitet. Dette gir til sammen fire kategorier av kreativitet og *fire-K-modellen for kreativitet* («the Four-C Model of Creativity»).

Et matematisk problem Alv har brukt i ulike klasser med lærerstudenter, går ut på å spørre om det fins to irrasjonale tall som er slik at summen av dem er rasjonal. For å forstå problemet trenger studentene litt kunnskap om reelle tall. De trenger antagelig å kjenne til at rasjonale tall kan skrives som periodiske desimaltall, mens irrasjonale tall har en desimaltallutvikling uten periode. Med denne innsikten kan det være underlig at summen av to desimaltall uten periode kan gi et desimaltall med periode. For å løse problemet trenger studentene en idé. Ideen kan for eksempel være at både $\sqrt{2}$ og $1 - \sqrt{2}$ er irrasjonale tall, og at summen av dem er 1, som er rasjonalt. Det interessante med dette problemet er at det hverken krever mye kunnskaper eller mye regneferdigheter, men erfaring med å omforme algebraiske uttrykk vil være en fordel. Studentenes matematiske kreativitet kan komme til uttrykk hvis ideen er deres egen. Alv sin erfaring er at det vanligvis bare er én eller to studenter av en klasse på omtrent 25 studenter som løser dette problemet. Problemstillingen er ikke ny for resten av den matematiske verden, derfor er dette et eksempel på kreativitet innenfor kategorien mini-k.

Imitativt og kreativt resonnement

Lithner (2008) har utviklet et teoretisk rammeverk for å analysere matematiske resonnementer og kreativitet hos studenter. Rammeverket ble utviklet ved å analysere både oppgaver og studenters oppgaveløsninger på ulike introduksjonsemner i matematikk ved universiteter i Sverige. Alv sin studie bygger i utgangspunktet på Lithners rammeverk. Den grunnleggende tanken bak er at utenatlæring innebærer *imitative* resonnementer, mens resonnementer som ikke er *imitative*, kalles *kreative*. Imitative resonnement er basert på å imitere eller kopiere resonnementer som allerede fins, for eksempel i en lærebok. En student som løser matematiske oppgaver ved å følge eksempler i læreboken trinn for trinn, resonnerer imitativt. På den annen side er kreativt matematisk funderte resonnementer karakterisert ved:

1. Originalitet. Et nytt (for den resonnerende) resonnement skapes. Eller et glemt resonnement gjenskapes.
2. Plausibilitet. Det fins argumenter som støtter den valgte strategi og/eller konklusjonene.
3. Matematisk fundament. Argumentene bygger på de matematiske egenskapene ved de komponentene som inngår i resonnementet.

I følge Pólya (1954) fins det to typer matematiske resonnementer: *demonstrative matematiske resonnementer* og *plausible matematiske resonnementer*. Lithners (2008) rammeverk er inspirert av dette. Matematiske bevis består av demonstrative matematiske resonnementer, mens vi gjør bruk av plausible matematiske resonnementer når vi løser et matematisk problem eller finner et matematisk bevis.

Gestaltmodellen

Sriraman (2009a) studerer matematikeres forskning, nærmere bestemt hvordan de løser matematiske problemer og utvikler ny matematikk. Resultatene indikerer at matematikernes kreative prosess følger gestaltmodellens fire stadier: *preparasjon–inkubasjon–illuminasjon–verifikasjon* (Wallas, 1926). Det første stadiet, preparasjon, preges av konsentrert arbeid med et problem for å forstå problemet snarere enn å finne en løsning. I det andre stadiet legges problemet bort en stund mens andre aktiviteter får oppmerksomheten. Dette kalles inkubasjon. Problemet glemmes for en stund, men kanskje ikke helt. Det kan hende underbevisstheten arbeider videre med problemet. Illuminasjon er øyeblikket der det dukker opp en idé som kan løse problemet. Det kan tilsynelatende se ut som denne ideen kommer helt ut av det blå, så det kan hende underbevisstheten spiller en rolle her også. Til slutt må ideen verifiseres for å se om den faktisk løser problemet. Dette siste stadiet kalles verifikasjon. Selv om inkubasjon og illuminasjon kan være styrt av underbevisstheten, foregår både preparasjon og verifikasjon på det bevisste planet.

Sriraman (2009a) definerer kreativitet som evnen til å produsere nytt og originalt arbeid. Denne definisjonen er ikke avhengig av hvilket nivå den kreative prosessen ligger på.

For deltagerne i Sriramans studie handler arbeidet om å publisere originale matematiske arbeider i anerkjente vitenskapelige tidsskrifter.

Divergent tenking og fleksibilitet

Haylock (1987) studerer kreativitet hos elever i skolen. Han presenterer to nøkkelaspekter ved kreativitet. Det ene er evnen til å tenke fleksibelt, og det andre er evnen til å tenke divergent. Evnen til å tenke fleksibelt viser seg særlig i to typer situasjoner. Den ene er at eleven ikke holder fast på en algoritme når det fins enklere løsninger. Den andre er at eleven er i stand til å se tilstrekkelig mange muligheter ved en gitt situasjon til å finne en løsning. Konvergent tenkning brukes der problemet er formulert slik at det bare har én løsning. Divergent tenkning representerer motstykket til dette. Oppgaver som krever divergent tenkning, har mange løsninger, og kreativiteten kommer til uttrykk ved det å finne mange løsninger. Haylock (1987) gir et eksempel på divergent tenking som går ut på å finne flest mulig anvendelser av en murstein. Oppgaven lyder: «Think of all the uses you can for a brick.» Oppgaver fra skolematematikken er ofte formulert slik at de bare har én løsning, det vil si at de krever konvergent tenkning. Selv om oppgaver har en entydig løsning, er det likevel ofte flere veier fram til løsningen.

Relativ og absolutt kreativitet

Leikin og Pitta-Pantazi (2013) presenterer en oversikt over forskning innen feltet matematikk og kreativitet. Forskningen tar for seg flere aspekter ved kreativitet. Det gjelder hvordan man kan definere kreativitet, sammenhengene mellom kreativitet og begavelse og om kreativitet bør oppfattes som en del av et produkt, et arbeid, en arbeidsprosess eller et miljø, eller om det er en egenskap ved en person.

Leikin og Pitta-Pantazi skiller mellom *relativ* kreativitet og *absolutt* kreativitet. De oppfatter kreativitet som en egenskap ved en person. Studenters evne til å frambringe løsninger på matematiske oppgaver som er nye bare for studentene, eller originale løsninger på oppgaver studentene allerede kan løse, kalles relativ kreativitet. Ideer eller løsninger på matematiske problemer som er nye for verdens matematikere, er resultater av absolutt kreativitet. Arbeider som belønnes med Fieldsmedaljen eller Abelprisen, er resultater av absolutt kreativitet.

Alvs studie

Dette avsnittet presenterer først målsettingen med studien og hvordan den ble gjennomført. Deretter følger en gjennomgang av Alvs fire tekster.

Målsettingen med studien

Alv ville undersøke studenters matematiske resonnementer. Målsettingen var å identifisere og beskrive lærerstudentenes matematiske kreativitet. Det foreligger ikke tidligere forskning på norske lærerstudenters matematiske kreativitet. Hensikten med studien var å belyse lærerstudenters matematiske resonnementer når de har samtaler om matematiske oppgaver i små grupper. Studentene som deltok i undervisningseksperimentet, ble ikke valgt på basis av hverken matematisk talent eller dyktighet.

Alv gjorde video- og lydopptak av lærerstudenter fra egen klasse mens de arbeidet med matematikkoppgaver i små grupper. Klassen bestod av omtrent 25 studenter, og nesten alle deltok i undervisningseksperimentet. Hver gruppe bestod av 2, 3 eller 4 studenter. Dette skapte en situasjon der dialog var naturlig. Alv gjennomførte undervisningen, mens Anne utførte videoopptakene. Flere av gruppene hadde lydopptakere på bordet. Det lå i utgangspunktet til rette for en kvalitativ studie fordi Alv ønsket å få frem ulike aspekter ved studentenes resonnementer. Han holdt muligheten åpen for at han ville finne svært lite eller ingen kreativ resonnering hos studentene. En annen mulighet var at han ville finne andre kategorier av resonnementer enn han forutså. Det viste seg at ulike grupper valgte ulike framgangsmåter og resonnerte litt forskjellig.

En kvalitativ studie har muligheter for å si noe om hvordan lærerstudenter resonnerer matematisk, men ikke nødvendigvis hvordan de resonnerer i enhver sammenheng. Dersom studien blir gjennomført på nytt med andre studenter, kan det tenkes at andre sider ved deres matematiske resonnementer kommer fram.

Gjennomføringen av studien

Etter at undervisningseksperimentet var gjennomført, transkriberte Alv lyd- og videoopptak av studentenes diskusjoner. Mens han gjorde dette, vurderte han hvordan teoriene fra doktorgradsemnet og essayet korresponderte med studentenes matematiske resonnementer. På bakgrunn av dette utviklet han et rammeverk som inngikk i en tekst til konferansen CERME8. Etter at konferansen var over, gikk han grundigere inn i datamaterialet og fant mangler ved rammeverket. Dette førte til at Alv utviklet et nytt rammeverk som ble presentert på konferansen CERME9. Parallelt med dette utviklet han essayet fra doktorgradskurset til en populærvitenskapelig artikkel om matematisk kreativitet. Artikkelen ble publisert i *Tangenten*. Datamaterialet i dette kapitlet består av tre fagfellevurderte tekster og en redaksjonelt behandlet tidsskriftartikkel:

1. Essay skrevet til doktorgradsemnet «Mathematics – Creativity – Culture» (Birkeland, 2010).
2. Poster presentert ved CERME8 (Birkeland, 2013a).
3. Artikkel i Tangenten (Birkeland, 2013b).
4. Paper akseptert for CERME9 (Birkeland, in progress).

Tekst 3 er en videre bearbeiding av essayet i tekst 1. Disse to tekstene redegjør for matematisk kreativitet på generelt grunnlag. Tekst 4 er en bearbeiding av tekst 2, og begge disse tekstene analyserer undervisningseksperimentet. Analyseenheten består av studentenes samtaler og diskusjoner i gruppene. Utviklingen av teorigrunnlag og rammeverk i de fire tekstene blir belyst ved at analysen peker på mangler ved det rammeverket Alv først hadde valgt. Sfards (2008) begrep *kommognisjon* og Alrø og Skovsmoses (2006) begrep *kritisk dialog* bidrar til å belyse hvordan utviklingen fant sted.

Tekst 1: Essay fra doktorgradsemne våren 2010

Et arbeidskrav i Bharaths doktorgradsemne var å skrive et essay. Innledningsvis tar essayet opp spørsmålet om matematikk skapes eller oppdages. Dette er et matematikkfilosofisk spørsmål som handler om hvorvidt matematikk fins objektivt og uavhengig av vår kunnskap om den (Davis, Hersh & Marchisotto, 1981/2003). Man kan stille spørsmål om hvilken rolle kreativitet kan spille dersom matematikk fins objektivt i seg selv. Da vil matematikk være noe man oppdager. Essayet antyder at det å oppdage matematikk, kan skje som resultat av kreativ matematisk virksomhet. Dessuten gir essayet flere eksempler som skal illustrere hvordan kreativitet spiller en rolle i matematikk. Essayet presenterer tre teoretiske rammeverk for å analysere matematisk kreativitet. Det ene er Beghetto og Kaufman (2009) sin definisjon av kreativitet og deres fire-K-modell for kreativitet, det andre er Lithner (2008) sin inndeling i *imitativt* og *kreativt* matematisk resonnement og det tredje er hvordan gestaltmodellen (Sriraman, 2009a) beskriver den kreative prosessen.

I tillegg til teori presenterer essayet noen eksempler som kan vise hva matematisk kreativitet kan gå ut på. Det første eksemplet er et historisk eksempel som handler om Pytagoras' setning og Pytagoras' introduksjon av matematiske bevis. Siden matematiske bevis var nytt på denne tiden, er det kanskje rimelig å oppfatte dette som kreativitet på svært høyt nivå (Stor-K). Det andre eksempelet handler om rasjonale og irrasjonale tall og spørsmålet om hvorvidt det fins to irrasjonale tall som er slik at summen av dem er rasjonal. Spørsmålet kan besvares uten noe særlig regneferdigheter. Etter at man har forstått problemet, kan man finne en løsning hvis eller når man får en idé. Det som kreves, er trolig kreativitet. Det tredje eksemplet er opprinnelig fra Diofants *Arithmetica*. Det er ment å vise hvordan en student resonnerer selvstendig. Det betyr i denne sammenheng at studenten ikke resonnerer imitativt (Lithner, 2008).

Til slutt berører essayet mulige affektive sider ved kreative prosesser. For å gå gjennom en kreativ prosess kreves antagelig en del motivasjon. Det hender at man kan finne løsningen på et matematisk problem hvis man legger det bort en stund og heller kommer tilbake til det senere. Studenter som mangler slik erfaring, kan miste motivasjonen og gi opp å finne en løsning. Rammeverket for studien utviklet seg videre etter at Alv hadde diskutert affektive aspekter ved kreativitet med Bharath. For å unngå et for omfattende rammeverk valgte Alv å begrense studien til kun å omfatte kognitive aspekter ved studenters resonnementer. Dette innebærer at han ikke analyserer samspillet i studentgruppene og andre affektive aspekter ved studentenes resonnementer.

Tekst 2: Poster fra konferansen CERME8 våren 2013

Alv analyserte transkripsjoner av opptakene fra undervisningseksperimentet og fikk antatt en poster til den europeiske forskningskonferansen CERME8[2]. Forskningsspørsmålet i posteren er:

> Kan lærerstudenters matematiske resonnering være kreativ resonnering, i betydningen kreativ matematisk fundert resonnering (KMR)?

[2] Den åttende konferansen for The European Society of Research in Mathematics education.

Fire-K-modellen til Beghetto & Kaufman (2009) ble brukt for å kategorisere kreativitet i studentenes matematiske resonnementer. Gestaltmodellen (Sriraman, 2009a) var en del av rammeverket i denne teksten. Lithner (2008) sitt skille mellom imitativt og kreativt matematisk resonnement ble brukt til å identifisere kreativitet. Studentenes matematiske resonnementer ble enten sett på som imitative eller kreative matematiske resonnementer. Posteren ble laget basert på de første analysene av studentenes dialoger. Målet var å identifisere matematisk kreativitet i resonnementene til studentene. Analysen indikerte at studentenes kreativitet kunne kategoriseres som mini-k-kreativitet, og at studentenes matematiske resonnementer ikke var imitative. Skiller man mellom imitative og kreative matematiske resonnementer (Lithner, 2008), så følger at resonnementene var kreative.

Tekst 3: Artikkel i Tangenten 2013

Artikkelen *Kreativitet i matematiske resonnement* (Birkeland, 2013b) kan sees på som en videreføring av essayet (tekst 1). Alv hadde to hensikter med denne teksten. Først ville han redegjøre for hva som kjennetegner matematisk kreativitet. Begrepet kreativitet brukes i dagligtale i svært mange sammenhenger. Ikke alltid med samme innhold, og kanskje heller ikke alltid med et særlig klart innhold. Forskningstekster krever mer presis begrepsbruk enn dagligtale, og i tillegg krever de operasjonalisering av begrepet kreativitet. Artikkelen redegjør for dette, men ikke på en uttømmende måte, til det er den for kort. Den andre hensikten med tekst 3 var å belyse matematisk kreativitet gjennom eksempler som kan være relevante for undervisning i skolen. Artikkelen presenterer fire slike eksempler. Noen av dem er også beskrevet i tekst 1. Det første eksemplet handler om beviset for Pytagoras setning. De øvrige eksemplene handler om tallteori. Tekst 3 knytter de fire konkrete eksemplene til Lithners (2008) rammeverk, Sriramans (2009a) definisjon av kreativitet og Beghetto & Kaufmans (2009) fire-K-modell for kreativitet. På det viset belyser teksten hvordan begrepet kreativitet kan settes i sammenheng med matematikk.

Tekst 4: Paper fra konferansen CERME9 våren 2015

Posteren fra konferansen CERME8 ble videreutviklet til et paper som ble presentert ved konferansen CERME9. Forskningsspørsmålet i tekst 4 problematiserer valget av rammeverk i tekst 2:

> Er Lithners (2008) skille mellom *imitativ* og *kreativ* resonnering tilstrekkelig for å analysere lærerstudenters matematiske resonnering, eller kan noe av deres resonnering være verken *imitativ* eller *kreativ*?

Dette førte til et behov for å studere andre teoretiske tilnærminger til kreativitet. Resultatet var en ny og utvidet kategorisering av matematiske resonnementer, der fleksibilitet (Haylock, 1987) inngår som et eget aspekt ved kreativitet. Fleksibilitet er motstykket til fiksering, som betyr at resonnementet eller tankegangen er fastlåst. Fiksering innebærer enten at studentene ikke ser alle mulighetene som ligger i en situasjon, eller at de holder fast på en algoritme selv om det fins bedre løsninger. Gestaltmodellen (Sriraman, 2009a) inngår ikke lenger i analysene fordi denne modellen ikke kan anvendes direkte innenfor rammen av en vanlig skolehverdag. Det er vanskelig å legge fra seg problemet en stund (inkubasjon) for å gjøre noe helt annet i en skolehverdag.

Siden studenters eventuelle kreativitet normalt vil være kategorisert som mini-k-kreativitet, ble fire-K-modellen erstattet med en modell som bare skiller mellom relativ og absolutt kreativitet (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). Studentenes matematiske kreativitet vil normalt være relativ kreativitet fordi ingen av dem forventes å komme med ideer som er nye for det internasjonale samfunnet av matematikere.

Det nye rammeverket består av Sriramans (2009) definisjon av begrepet kreativitet og i tillegg tre dikotome begrepspar. Det ene paret er relativ og absolutt kreativitet (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). Det andre er fleksibilitet og fiksering (Haylock, 1987). Analysen av transkripsjonene viste at studentenes resonnementer hadde fleksibilitet, men manglet originalitet. Siden studentenes resonnementer hadde fleksibilitet, var de ikke imitative (Lithner, 2008), men siden de manglet originalitet, var de heller ikke kreative (Sriraman, 2009). Derfor ble kategoriene *imitative* og *ikke-imitative* resonnementer innført. Matematiske resonnementer som ikke var imitative, ble kalt ikke-imitative. Det betyr at studentenes resonnementer kunne være verken imitative eller kreative. Det tredje begrepsparet var altså imitative og ikke-imitative resonnementer.

Sammendrag av de fire tekstene

Utviklingen av teoretisk rammeverk kommer til syne i tekst 4. Gestaltmodellen (Sriraman, 2009a) er beskrevet i tekst 1, og den var implisitt med i rammeverket i tekst 2. Fire-K-modellen inngikk i de tre første tekstene, men i tekst 4 er den erstattet av kategoriene relativ og absolutt kreativitet (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). Lithners (2008) rammeverk inngikk i de tre første tekstene, mens tekst 4 viser at dette rammeverket ikke er tilstrekkelig til Alvs analyser. Haylocks (1987) teori inngikk i tekst 4.

De tre første tekstene behandler begrepet kreativitet ved hjelp av Sriramans (2009a) definisjon, Beghetto og Kaufmanns (2009) fire-K -modell og Lithners (2008) rammeverk. Lithners rammeverk er konstruert for å analysere kreativitet i studenters matematiske resonnementer, mens gestaltmodellen, Sriramans definisjon og fire-K-modellen forholder seg til kreativitet mer generelt. Definisjonen av kreativitet i fire-K-modellen inkluderer nytteaspektet, mens Sriramans (2009) definisjon ikke har noen krav om nytteverdi. Tekst 4 inneholder ikke noe krav om nytteverdi, derfor anvender den Sriramans definisjon. Analysen viste at Leikin og Pitta-Pantazis (2013) inndeling i relativ og absolutt kreativitet er mer hensiktsmessig enn firedelingen i fire-K-modellen. Sfards (2008) begrep *commognition* ble brukt som begrunnelse for at studentenes tenking uttrykkes i kommunikasjon med medstudenter.

Tekst 2 bygger på en karakterisering av studentenes resonnementer ved Lithners (2008) rammeverk. Nærmere analyser pekte mot at det finnes resonnementer hos studentene som verken er kreative eller imitative. Tekst 4 anvender derfor en ny og utvidet kategorisering, som også omfatter Haylocks (1987) begrep *fleksibilitet*.

Utvikling av teoretisk rammeverk for Alvs studie

Alv hadde i utgangspunktet en intensjon om å lære mer om matematisk kreativitet, derfor gjennomførte han doktorgradsemnet der dette temaet inngikk. I emnet presenterte Bharath mesteparten av teorien som inngår i de tre første tekstene, bortsett fra Lithners (2008) rammeverk. Som professor II bidro Marit Johnsen-Høines med viktig kompetanse under planleggingen av Alvs studie. Hun veiledet ham i hvordan han kunne forske på egen undervisning, og det var hennes forslag at han kunne gjøre lyd- og videoopptak av studentenes dialoger.

Utviklingen av det teoretiske rammeverket for studien var et resultat av *kritisk refleksjon*, slik Alrø og Skovsmose (2006) bruker begrepet: Alv vurderte og revurderte sine tanker, følelser og handlinger. Dette endte med at han etter hvert fant det opprinnelige rammeverket utilstrekkelig. Derfor søkte han etter ny teori som kunne passe bedre for det datamaterialet han hadde samlet inn.

Marit virket som katalysator på kommunikasjonen i matematikkdidaktikkmiljøet i Tromsø. Hun etablerte faste arenaer der gruppens medlemmer fikk innblikk i hverandres tekster. Hun viste alle respekt gjennom blant annet å gi lik oppmerksomhet til alle og å forvente at alle skulle presentere sine arbeider i felles forum. Marits samtaler på tomannshånd med forskningsgruppens medlemmer og diskusjonene i gruppen var lagt opp som dialogiske samtaler, der hun la til rette for refleksjon hos deltakerne. Hun viste her hvordan kritikk forutsetter involvering og intensjon, slik Alrø og Skovsmose (2006) beskriver. Slik la hun til rette for en god kommunikasjon mellom Alv og hans kolleger i det hjemlige fagmiljøet. Dette kan beskrives ved at han delte noen av sine tanker med sine kolleger. Denne tankeutvekslingen, eller *kommognisjonen* (Sfard, 2008), resulterte i at Lithners rammeverk lå til grunn for analysene i tekst 2. Alv ble introdusert for Lithners (2008) rammeverk i en samtale med kollega Per Øystein Haavold. I en *kritisk dialog* (Alrø & Skovsmose, 2006) trakk Anne fram Sfard. Alv fant at *kommognisjon* ga en metodologisk begrunnelse for å bruke dialoger som analyseenhet i studien. Dialogene mellom studentene i hver gruppe ble oppfattet som en kommunikasjon mellom individer, og resonnering ble oppfattet som en form for tenkning.

Tekst 3 er et resultat av at Marit foreslo for Alv å skrive en populærvitenskapelig artikkel. Her bygde han videre på tekst 1, essayet. Nå hadde han dessuten erfaringer fra tekst 2 der han analyserte undervisningseksperimentet og presenterte analysene i en poster på CERME, slik at han kjente fagstoffet godt. Perspektiver på matematisk kreativitet var ikke presentert tidligere i Tangenten.

Tekst 4 er en videreutvikling av tekst 2. I en samtale med Bharath redegjorde Alv for noen funn han fant interessante: Alv fant at noen av studentenes resonnementer så ut til å være verken imitative eller kreative. Derfor kunne det være at Lithners (2008) rammeverk ikke var tilstrekkelig til Alvs analyser. Bharath oppmuntret Alv til å undersøke dette nærmere. En annen årsak til at rammeverket utviklet seg videre, var at Marit systematiserte bruken av kritiske dialoger*,* slik at Alv fikk et forum der han kunne diskutere faglige spørsmål. Hun la vekt på at dialogene skulle være undersøkende, uforutsigbare og likeverdige samtaler. Hun var lyttende og forventet at alle i gruppen skulle være det. Mens kritiske dialoger tidligere fant sted mer eller mindre tilfeldig, bidro Marit til at dette ble en etablert arbeidsform. Situasjonen der rammeverket i tekst 2 viste seg mangelfullt, kunne ført til at videre arbeid med studien gikk i stå. Det er trolig flere årsaker til at arbeidet utviklet seg videre. Én årsak er at Alv var genuint interessert i å finne ut av dette.

Nærmere studier av teori og diskusjoner med kollegaer ga Alv indikasjoner på at resonnementer kunne være fleksible uten å være originale («novel»). Det mest markante i utviklingen av teoretisk rammeverk for studien, var introduksjonen av Haylocks (1987) begrep fleksibilitet. Kollega Per Øystein Haavold som også deltok i doktorgradsemnet og som forsker på feltet matematikk og kreativitet, refererte til Haylock i en faglig samtale. Alv fant dette interessant. Fordi Haylocks arbeid ble publisert for mer enn 25 år siden, er det lite trolig at Alv ville funnet dette på egen hånd ved hjelp av litteratursøk. Dialogene mellom Alv og kollega Per Øystein er et eksempel på *kritiske* samtaler der begge hadde en intensjon om å lære mer om matematisk kreativitet. I etterkant av doktorgradsemnet hadde de flere samtaler og diskusjoner der de utvekslet og diskuterte ulike teoretiske perspektiver på matematisk kreativitet.

På konferansen CERME8 var Alv med i en arbeidsgruppe med tittel «Mathematical potential, creativity and talent». Her ble han introdusert for begrepene *absolutt og relativ kreativitet* (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013) av gruppelederen Roza Leikin. Marit oppfordret Alv til å presentere prosjektet sitt på CERME 8, han hadde trolig ikke deltatt på denne konferansen uten hennes oppfordring.

Bharath fortsatte å diskutere matematisk kreativitet med flere av forskningsgruppens medlemmer etter at doktorgradsemnet var over. Da Marit ble ansatt som professor II, lå forholdene til rette for en konstruktiv utvikling av *kritiske* samtaler i dette fagmiljøet. Marit var den katalysatoren som gruppen trengte for å gjennomføre dette. For Alv sin studie førte dette til utvikling av nye analyseresultater, til ny teori som beskriver lærerstudenters matematiske resonnementer og kreativitet.

Sluttord

Dette kapitlet hadde trolig aldri sett dagens lys hvis ikke UiT – Norges arktiske universitet, hadde opprettet en stilling som professor II tilknyttet matematikkmiljøet i lærerutdanningene. Opprettelsen av forskningsgruppen i matematikkdidaktikk og doktorgradsemnet om kreativitet og kultur foregikk uavhengig av professor II – stillingen. Formelle og uformelle diskusjoner i kjølvannet av doktorgradsemnet fant også sted uavhengig av Marits stilling. Hennes arbeid i denne fasen var imidlertid av uvurderlig verdi for fagmiljøet. Alle i gruppen visste at hun kom flere ganger per semester og alle visste at da måtte de rydde plass til faglige samtaler og til å sette seg inn i de andre sine arbeider. I starten kom det protester på Marits innspill: Flere mente de ikke hadde tid til slike faglige møter, men hun fikk gjennomslag for sine forslag. I tillegg begynte gruppen å gå ut og spise middag sammen hver periode med professor II – besøk. Vi ønsker å takke Marit for den gode og viktige jobben hun gjorde mens hun var ved UiT. Kapittelet viser hvor viktig det er for utviklingen av et fagmiljø å ha tilknyttet en kompetent fagperson utenfra over tid. Det Marit har gjennomført i fagmiljøet viser noe av potensialet og mulighetene som ligger i stillinger som professor II.

Referanser

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2006). Læring i spændingsfeltet mellem dialog, intention, refleksion og kritik. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kunne det tænkes? - Om matematiklæring* (s. 127–138). København: Malling Beck.

Ambrose, D. (2009). Large Scale Socioeconomic, Political and Cultural Influences on Giftedness and Talent. I L. V. Shavinina (red.), *International Handbook on Giftedness* (s. 885–903). Dordrecht: Springer Netherlands.

Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2009). Do we all have multicreative potential? *ZDM. Mathematics Education, 41*, 37–42. doi: 10.1007/s11858-008-0143-7

Birkeland, A. (2010). *On Creativity and Mathematics*. Essay til doktorgradsemnet «Mathematics-culture-creativity. Indigenous profiles and interdisciplinary approaches to innovation, teaching and learning ». Universitetet i Tromsø.

Birkeland, A. (2013a). *Can we just add like that?* Poster session presentert ved Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME8), Antalya, Tr. Lastet ned 14. januar 2015 fra http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Birkeland, A. (2013b). Kreativitet i matematiske resonnement. *Tangenten, 24*(2), 25–29.

Birkeland, A. (2015). *Pre-service teachers' mathematical reasoning*. Paper presentert ved 9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME9), Praha, Cz.

Davis, P. J., Hersh, R. & Marchisotto, E. A. (2003). *The Mathematical Experience* (tredje opplag). Boston/Basel/Berlin: Birkhäuser (Opprinnelig publisert 1981).

Haylock, D. (1987). A Framework for Assessing Mathematical Creativity in Schoolchildren. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 59–74.

KD, Kunnskapsdepartementet (2010). *Forskrift om rammeplan for grunnskolelærerutdanningene for 1.–7. trinn og 5.–10. trinn*. Lastet ned 9. januar 2015 fra https://www.regjeringen.no/nb/dokumenter/forskrift-om-rammeplan-for-grunnskolelar/id594357/

KUF, Kirke- Utdannings og Forskningsdepartementet (1996). *Generell del av læreplanen.* Lastet ned 9. januar 2015 fra http://www.udir.no/Upload/larerplaner/generell_del/generell_del_lareplanen_bm.pdf?epslanguage=no

Leikin, R., Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: the state of the art. *ZDM. Mathematics Education, 45*, 159–166. doi: 10.1007/s11858-012-0459-1

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 255–276. doi: 10.1007/sl0649-007-9104-2

Lubart, T. (2000). Creativity across cultures. I R. J. Sternberg (red.), *Handbook of Creativity* (s. 339–350). Cambridge/ New York, NY/Melbourne: Cambridge University Press.

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet. En undervisningslære.* Rud: NKI-forlaget.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics* (Vol 1). Princeton: Princeton University Press.

Root-Bernstein, R. (2003). Problem generation and innovation. I L. V. Shavinina (red.), The *International Handbook on Innovation* (s. 170–179). Oxford/St. Louis, MO: Elsevier Science.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

Sriraman, B. (2009a). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM. Mathematics Education, 41*, 13–27. doi: 10.1007/s11858-008-0114-z

Sriraman, B. (2009b). Interdisciplinarity in Mathematics Education: Psychology, Philosophy, Aesthetics, Modeling & Curriculum. *ZDM. Mathematics Education, 41*, 1–3. doi: 10.1007/s11858-008-0162-4

Sternberg, R. J. (2007). Cultural Concepts of Giftedness. *Roeper Review, 29*, 160–165. doi:10.1080/02783190709554404

Wallas, G. (1926). *The art of thought.* New York, NY: Harcourt, Brace & Jovanovich.